EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON, UNA ALTERNATIVA DEL INGENIERO PARA RESOLVER ECUACIONES NO LINEALES

Ronald Fernando Rodríguez Espinoza

Docente de la Facultad de Ingeniería Química y Metalúrgica - U.N.J.F.S.C.

El presente artículo tiene por objetivo brindar una exposición clara y exhaustiva del método de Newton-Raphson para la resolución de ecuaciones no lineales, minimizando el esfuerzo que involucra a los estudiantes de ingeniería el aprendizaje en la resolución de ecuaciones no-lineales.

1. Algoritmo del método de Newton-Raphson:

El método de Newton-Raphson es un método iterativo, el cual es uno de los más usados y efectivos, porque a diferencia de otros métodos no trabaja sobre un intervalo sino que basa su fórmula en un proceso iterativo.

Sea la función $f(x)$ cuya raíz es x, en donde la recta tangente a dicha función es $f(x)$. Supongamos luego que tenemos la aproximación x_i a la raíz x_r de $f(x)$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente a en el punto es:

$$y - f(x_i) = f'(x_i) \cdot (x - x_i) \quad (1)$$

Esta recta cruza al eje x en un punto que será la siguiente aproximación a la raíz . La aproximación a la raíz se encuentra cuando , que corresponde al valor de . x_{i+1}

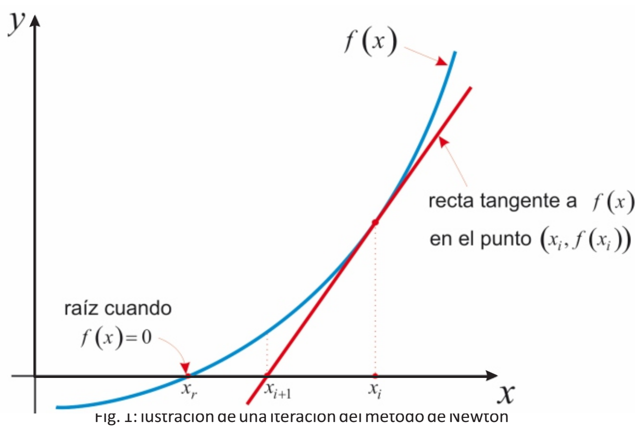


Fig. 1: Ilustración de una iteración del método de Newton

De la ecuación (1) se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2)$$

La cual es la formula iterativa de Newton-Raphson, en donde .

$$f'(x_i) \neq 0$$

En cada iteración i, considerar la recta tangente a $f(x)$ en $(x_i, f(x_i))$ y tomar como siguiente aproximación x_{i+1} , que corresponde a la intersección de dicha tangente con el eje de las abscisas. El primer valor correspondiente a , se asume de acuerdo al significado físico de la ecuación.

El proceso de iteración continúa hasta satisfacer los criterios de convergencia y exactitud dados:

Criterio de convergencia: $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon_1$

Criterio de exactitud: $|f(x_i)| \leq \varepsilon_2$

Se usa también el error relativo entre dos aproximaciones sucesivas, considerando la última aproximación como si fuera el valor exacto. El proceso iterativo se detiene cuando este error relativo aproximadamente es menor que una cantidad fijada previamente. El error relativo está dato por:

$$\varepsilon_r = \frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} \times 100 \quad (3)$$

Para aproximar una raíz real de una ecuación no lineal, es necesario proporcionar la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$, así como tener una aproximación inicial x_0 y los criterios de convergencia ε_1 y exactitud ε_2 .

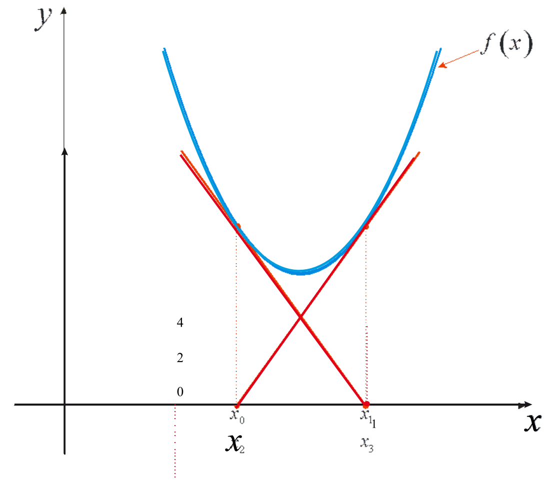
2. Regla para aplicar el Método de Newton-Raphson:

Supongamos que en los puntos a y b la función $f(x)$ tiene signos contrarios, con la particularidad de que en el segmento [a,b] la segunda derivada de la función $f(x)$ es positiva. Entonces, para la primera aproximación x , se debe elegir aquél de los puntos a y b en el que la función $f(x)$ toma un valor positivo. Si en el segmento [a,b] la segunda derivada es negativa, por la aproximación se escogerá el punto, donde la función $f(x)$ toma un valor negativo.

3. Desventajas del método de Newton-Raphson:

Aunque el método de Newton-Raphson en general es muy eficiente, hay situaciones en que se presenta dificultades, por ejemplo cuando se presentan raíces múltiples. Algunas veces el método de Newton-Raphson no converge sino que oscila. Esto ocurre cuando:

a) No hay raíz real



b) Si la raíz es un punto de inflexión:

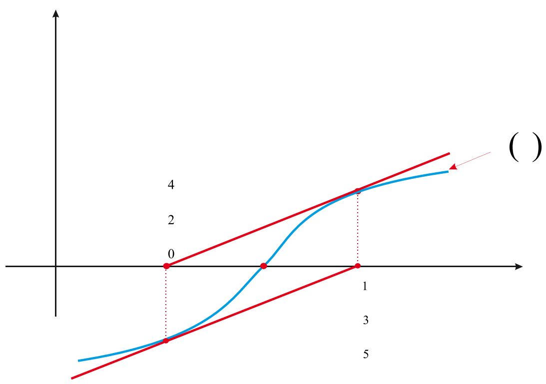


Fig. 3: Punto de inflexión

c) Si el valor inicial está muy alejado de la raíz buscada y alguna otra parte de la función "atrapa" la iteración:

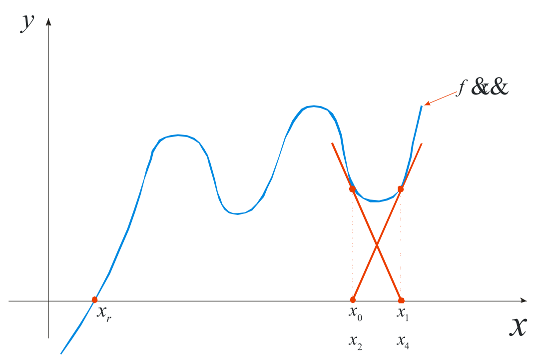


Fig. 4: Valor inicial muy lejos de la raíz

4. Observaciones del Método de Newton-Raphson:

a) El método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde nos asegure que encontraremos la raíz.

b) Elegir el valor inicial x_0 puede ser complicado.

c) Requiere que $f'(x_i) \neq 0$

d) Existen muchos casos en donde este método no converge hacia la raíz buscada, en cuyo caso se dice que el método diverge.

e) Sin embargo, en los casos donde existe convergencia hacia la raíz, lo hace con una rapidez impresionante, por lo que el resultado se obtiene en relativamente pocas iteraciones. Por esta razón es considerado como uno de los métodos preferidos por excelencia.

Ejemplo: La concentración C de una bacteria contaminante es un lago decrece según la expresión:

$$C(t) = 80 \cdot e^{-2 \cdot t} + 20 \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

Siendo t el tiempo en horas. Determinar el tiempo que se necesita para que el número de bacterias se reduzca a 7.

Solución: En el tiempo t , el número de bacterias será

$$C(t) = 7$$

La ecuación y su derivada pueden escribirse respectivamente como:

$$f(t) = 80 \cdot e^{-2 \cdot t} + 20 \cdot e^{-0,5 \cdot t} - 7$$

$$f'(t) = -160 \cdot e^{-2 \cdot t} - 10 \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

Para un valor inicial: t=1h

i	t	$f(t_i)$	$f'(t_i)$	t_{i+1}	ε_r
0	1,0	15,9574	-27,7190	1,5757	0,3653
1	1,5757	5,5199	-11,3952	2,06010	0,2351
2	2,06010	1,43901	-6,1685	2,2934	0,1017
3	2,2934	0,1685	-4,8065	2,3284	0,015058
4	2,3284	0,002928	-4,6410	2,3291	2,709E-4

Para que el número de bacterias se reduzca a 7, tienen que pasar 2,3 h.